

Giải toán trắc nghiệm thi tốt nghiệp THPT trên máy tính Casio.

Thực hiện: Lê Danh Long.

Phần 1: Giới thiệu chung

Trước thi tốt nghiệp trung học phổ thông môn toán năm 2017 của bộ giáo dục và đào tạo đưa ra, đề thi năm nay sẽ thi theo thể thức trắc nghiệm, vì về một số bạn sẽ chưa thể quen với việc giải trắc nghiệm với môn toán, cũng như việc eo hẹp về mặt thời gian sẽ khiến các bạn khó khăn trong quá trình xử lý các câu hỏi trong đề. Do đó, tôi xin đưa ra một số thủ thuật cũng như phương pháp sử dụng máy tính Casio giúp các bạn có thể dễ dàng hơn trong việc tìm ra đáp án trong thời gian ngắn nhất. Trong tài liệu này tôi có đưa ra phương pháp cho từng dạng toán, có ví dụ cụ thể và chi tiết cách giải để bạn đọc có thể dễ dàng nắm bắt và vận dụng, sau đó sẽ là một số bài tập để bạn đọc thực hành. Mong tài liệu này sẽ giúp ích cho các bạn trong kì thi sắp tới.

Trong tài liệu này, tôi nói đến việc sử dụng CASIO Fx 570VN plus. Vì thế một số phần bài tập các máy tính thấp hơn sẽ khó áp dụng được, tôi khuyên bạn đọc nên dùng ít nhất là máy fx 570 – ES. Các bạn nào có dòng máy thấp hơn thì vẫn có cách làm, muốn tìm hiểu xin liên hệ với tác giả.

Lẽ dĩ nhiên toán học vẫn cần tư duy và kiến thức tốt, và mặc dù tài liệu này có đưa ra rất nhiều phương pháp hay và ngắn gọn, nhưng nếu bạn đọc có kiến thức cơ bản tốt và tư duy nhanh nhạy, công việc vận dụng phương pháp sẽ hiệu quả hơn, máy tính CASIO sẽ giúp các bạn đắc lực hơn.

Tài liệu này chưa thể nêu lên đầy đủ hết chức năng của CASIO, bạn đọc có cách giải hay hoặc bổ sung xin liên hệ với tác giả để tài liệu được hoàn thiện hơn.

Chúc các bạn có một kì thi thật tốt!

Phần 2: Một số kiến thức trước khi bắt đầu

Trong máy tính CASIO phân định rất rõ ràng cách thao tác, cụ thể như sau:

➤ Phím lệnh SHIFT

Có màu vàng, nó sẽ có tác dụng với tất cả các chức năng màu vàng trên bàn phím máy tính.

Ví dụ: Trên phím AC có dòng chữ OFF màu vàng, do đó tổ hợp phím SHIFT AC sẽ có tác dụng OFF: Tắt máy.

➤ Phím lệnh ALPHA

ALPHA Có màu đỏ hồng, nó sẽ có tác dụng với tất cả các chức năng màu đỏ hồng trên bàn phím máy tính.

Ví dụ: Để nhập X lên màn hình, ta dùng tổ hợp phím ALPHA)

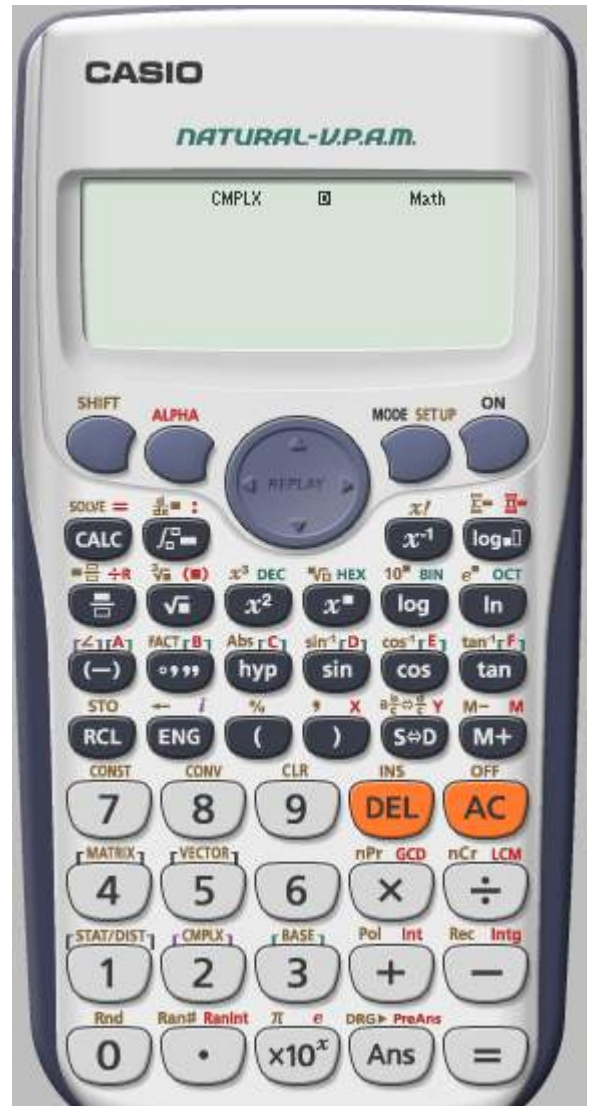
Trên phím “)” có chữ X màu đỏ hồng, khi nhấn thì màn hình sẽ hiện X.

➤ Phím lệnh MODE để chuyển chức năng hoạt động của máy tính.

Khi nhấn MODE máy tính sẽ hiện lên các chức năng hoạt động với

từng đối tượng làm việc.

Ví dụ: MODE 2 máy sẽ chuyển sang chế độ CMPLX làm việc trong môi trường số phức.



1:COMP	2:CMPLX
3:STAT	4:BASE-N
5:EQN	6:MATRIX
7:TABLE	8:VECTOR

➤ Trong quá trình tìm đáp án đúng, ta sẽ gặp một số trường hợp phải thử lần lượt các đáp án có trong đề bài. Ta nên tìm thứ tự thử thích hợp từ các đáp án **giống nhau** trước.

Xu hướng ra đề trắc nghiệm thường tung ra các **đáp án nhiều**, các đáp án nhiều thường sẽ rất giống nhau, khác nhau một chút phần hệ số hoặc phần

công thức, dễ gây cho học sinh tâm lý hoang mang, cũng như có thể nhầm trong quá trình chọn đáp án, nhưng đó cũng chính là chìa khóa để ta nhận ra đâu là đáp án **đề đúng** để tiến hành thử nó trước.

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2017}(x^2 + 1)$:

A. $y' = \frac{1}{x^2 + 1}$ **B.** $y' = \frac{1}{(x^2 + 1)\ln 2017}$ **C.** $y' = \frac{2x}{2017}$ **D.** $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)\ln 2017}$

Ở đề bài này, khi nhìn vào 4 đáp án, ta có thể thấy B và D rất giống nhau, sau đó khác hơn một chút là A, và cuối cùng khác nhất là C. Do đó trình tự thử đáp án của chúng ta sẽ là: B, D, A, C.

Phần 3: Áp dụng Casio vào giải các dạng toán

Kiến thức 1: Các bài toán về hàm số.

Ta sử dụng chức năng tính đạo hàm của hàm số tại 1 điểm để thực hiện tìm đáp án các bài toán tính đạo hàm

⇒ **Bài toán 1: Tính đạo hàm của hàm số tại 1 điểm** đáp án có kết quả.

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x = a$.

Cú pháp: $\frac{dx}{dx}(f(x)) \Big|_{x=a} - K$

Nếu kết quả là 0, đó là đáp án đúng.

Trong đó:

- $f(x)$ chính là hàm số trong bài toán
- a là giá trị của biến tính đạo hàm
- K là kết quả nằm trong các đáp án của đề bài.
- Bạn đọc có thể đổi máy tính thành chế độ làm tròn SHIFT MODE 6 và chọn làm tròn từ 0 ~9 chữ số sau dấu phẩy.

Hoặc cú pháp: $\frac{dx}{dx}(f(x)) \Big|_{x=a}$

Để tính kết quả đạo hàm của $f(x)$ tại $x = a$

Lưu ý: + Nếu $f(x)$ không liên tục tại x_0 thì máy báo lỗi “Math ERROR”

+ Nếu $f(x)$ dạng lượng giác, ta đổi sang đơn vị Radian (SHIFT MODE

4)

Thao tác thực hiện:



Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 + 3}{x - 2}$ tại điểm $x = 3$.

A. 9

B. -11

C. -9

D. -10

Lời giải:

Ta thực hiện cú pháp casio với $a = 3$, $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x - 2}$.

Với K, theo như **đáp án nhiều** tôi đã đề cập ở trên, ta thấy B, C, D khá giống nhau vì đều là số âm, còn A khác nhất, do đó ta sẽ thử B, C, D trước sau đó mới đến A.

Nhập $\frac{dx}{x} \left(\frac{2x^2 + 3}{x - 2} \right) \Big|_{x=3} + 11$ để thử đáp án B,

(K = -11 do đó -K = +11)

Kết quả là 2, do đó B sai.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x^2 + 3}{x - 2} \right) \Big|_{x=3} + 11 = 2$$

Tiếp tục thử đến C, với K = -9, chỉnh con trỏ và sửa

thành $\frac{dx}{x} \left(\frac{2x^2 + 3}{x - 2} \right) \Big|_{x=3} + 9$ ta sẽ được kết quả 5,18.10⁻¹², kết quả này rất nhỏ và ta coi nó như là 0.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x^2 + 3}{x - 2} \right) \Big|_{x=3} + 9 = 5.18 \times 10^{-12}$$

Ta có thể chuyển chế độ làm tròn 9 chữ số thập phân sau dấu phẩy bằng thao tác *SHIFT* → *MODE* → 6 → 9 ta sẽ thấy kết quả là 0.000000000.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x^2 + 3}{x - 2} \right) \Big|_{x=3} + 9 = 0.000000000$$

Do đó **C là đáp án đúng**.

Ta vẫn có thể tiếp tục thử đáp án D và A để kiểm tra D và A sai với K = -10 và K = 9

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x^2 + 3}{x - 2} \right) \Big|_{x=3} + (-10) = 1$$

K = -10

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x^2 + 3}{x - 2} \right) \Big|_{x=3} + 9 = -18$$

K = 9.

Vậy **C là đáp án đúng**.

Ví dụ 2: Giá trị đạo hàm của hàm số $y = x \sin x$ tại $x = \frac{\pi}{3}$ là :

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$

Lời giải :

Hàm số có chứa lượng giác, vì vậy ta sẽ chuyển chế độ Radian để tính, thao tác là $SHIFT \rightarrow MODE \rightarrow 4$

Theo **đáp án nhiều**, ta có thể suy ra thứ tự thử đáp án sẽ là B, C, D sau cùng là đến A.

Cú pháp : $\frac{d}{dx}(x \sin(x)) \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$ để thử B

Kết quả khác 0, do đó B sai.

Chỉnh con trỏ và sửa lại thành

$\frac{d}{dx}(x \sin(x)) \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$ để thử C.

Kết quả là 0. Vậy **C là đáp án đúng**.

Nếu C chưa phải đáp án đúng ta sẽ tiếp tục thử để tìm ra đáp án.

Ví dụ 3: Cho đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$, viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là:

- A. $y = -x - 3$ B. $y = -x + 3$ C. $y = x - 3$ D. $y = x + 3$

Lời giải:

Giao điểm với trục tung, có nghĩa là $x = 0$. Do đó hệ số góc của tiếp tuyến sẽ là

$y'(0)$. Cú pháp $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 - x + 3}{x - 1} \right) \Big|_{x=0}$ ta được kết quả là $y'(0) = 1$.

Dễ thấy $y(0) = 3$.

Do đó $y = x + 3$. **Đáp án D.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = 3x^3 - 5x^2 + 7$, có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = -2$.

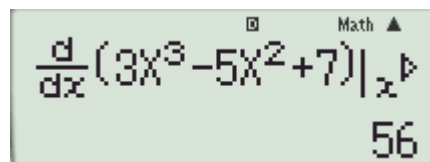
- A. $y = 56x + 75$ B. $y = -56x + 75$ C. $y = 56x - 75$ D. $y = -56x - 75$

Lời giải:

Ta phải làm 2 việc, đó là tính đạo hàm của y tại $x = -2$ $y'(-2)$ và tính giá trị của hàm số tại $x = -2$ $y(-2)$.

Tính đạo hàm ta dùng cú pháp:

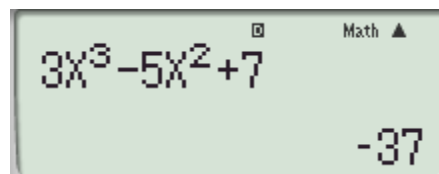
$$\frac{d}{dx}(3x^3 - 5x^2 + 7) \Big|_{x=-2} = 56.$$



Calculator screen showing the derivative of $3x^3 - 5x^2 + 7$ at $x = -2$, resulting in 56.

Vậy hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(-2) = 56$

Tính giá trị của biểu thức tại $x = -2$, ta nhập hàm $3x^3 - 5x^2 + 7$ vào màn hình rồi nhấn phím CACL, máy sẽ hỏi X? để hỏi giá trị của x, ta nhập -2 và nhấn “=”. Kết quả là -37.



Calculator screen showing the value of the function $3x^3 - 5x^2 + 7$ at $x = -2$, resulting in -37.

Phương trình tt: $y + 37 = 56(x + 2)$

$$\Rightarrow y = 56x + 75. \Rightarrow \text{Đáp án A}$$

▪ **Các bài tập tự luyện:**

Bài 1: Giá trị đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3x - 1}$ tại $x=1$ là?

- A. $1 - \frac{3}{2\sqrt{2}}$ B. $\frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}$ C. $1 - \frac{3}{2\sqrt{2}}$ D. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}$

Bài 2: Cho hàm số $y = 2^x - 3^{1-x}$, giá trị đạo hàm của hàm số khi $x=0$?

- A. $\ln 2 + 3\ln 3$ B. -2 C. 4 D. $\ln 54$

Bài 3: Cho hàm số $y = \cos^2 x \cdot \sin x$, giá trị đạo hàm của hàm số khi $x = \frac{\pi}{3}$?

- A. $\frac{7}{8}$ B. $-\frac{5}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $-\frac{7}{8}$

Bài 4: Cho đồ thị (C): $y = \frac{x-2}{x-1}$. Hệ số góc tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành là:

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. $-\frac{1}{2}$

Bài 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 7$ tại điểm có hoành độ bằng -1?

- A. $y = 9x + 4$ B. $y = 9x - 6$ C. $y = 9x + 12$ D. $y = 9x + 18$

Bài 6: : Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C): $y = x^3 - 2x$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ là:

- A. $y = -x - 2$ B. $y = x + 2$ C. $y = -x + 2$ D. $y = x - 2$

Bài 7: Phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 là:

- A. $y = -3x - 5$ B. $y = -3x + 13$ C. $y = 3x + 13$ D. $y = 3x + 5$

Bài 8: Cho hàm số $y = 2^{2x+3}$. Giá trị đạo hàm của y tại $x = 3$ là:

- A. $2^{10} \ln 2$ B. $2^9 \ln 2$ C. $2^{11} \ln 3$ D. $2^{10} \ln 3$

Bài 9: Phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ tại điểm có hoành độ -1 là:

- A. $y = 2x - 5$ B. $y = 2x - 4$ C. $y = 10x - 5$ D. $y = 10x + 4$

Bài 10: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+9}{x+3} + \sqrt{4x}$ tại điểm $x = 1$ là:

- A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{25}{16}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{11}{8}$

Bài 11: Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x^2-2)^4(3-2x^5)^7(2x-1)^{12}$. $f'(1)$ là:

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 2

Đáp án: 1.D 2.A 3.B 4.A 5.C 6.B 7.C 8.A 9.D 10.C 11.A

$\Rightarrow$ **Bài toán 2**: Tìm công thức đạo hàm của hàm số.

Cú pháp: $\frac{d}{dx}(f(x))\big|_{x=X} - f'(x)$

Trong đó: $f(x)$ là hàm số cần tìm đạo hàm

$f'(x)$ là đạo hàm của $f(x)$, là một trong bốn đáp án của đề bài

$x = X$ là giá trị biến cụ thể ta dùng để tính đạo hàm, tùy từng bài và theo điều kiện xác định của hàm, ta gán X cho thích hợp.

Ta sẽ dùng chức năng CALC của máy tính để gán giá trị của x vào biểu thức trên, nếu kết quả là 0 thì $f'(x)$ đó chính là kết quả đạo hàm của $f(x)$ cần tìm.

Ví dụ 1: Tôi sẽ lấy ngay bài toán ở Phần 2 để làm ví dụ.

Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2017}(x^2 + 1)$:

A. $y' = \frac{1}{x^2 + 1}$ B. $y' = \frac{1}{(x^2 + 1)\ln 2017}$ C. $y' = \frac{2x}{2017}$ D. $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)\ln 2017}$

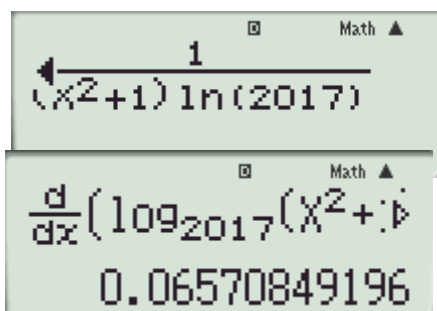
Lời giải:

Như đã phân tích ở phần 2, theo **đáp án nhiều**, ta sẽ thử theo thứ tự B, D, A, C.

Nhập vào màn hình máy công thức

$\frac{d}{dx}(\log_{2017}(x^2 + 1))|_{x=X} - \frac{1}{(x^2 + 1)\ln(2017)}$ để thử B.

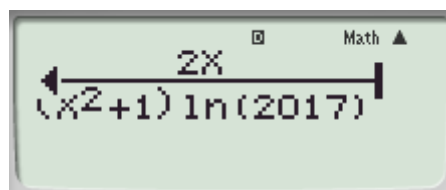
Sau đó nhấn CALC, máy sẽ hỏi X? để hỏi giá trị của X, ta sẽ nhập X = 1 rồi nhấn "=", máy sẽ hiện kết quả: 0.06570849196.



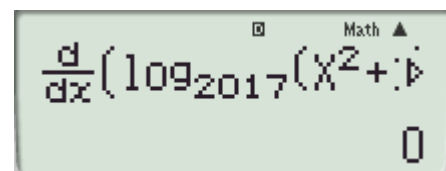
Do đó B không phải đáp án.

Tiếp tục thử đến D, chỉnh con trỏ và sửa lại thành

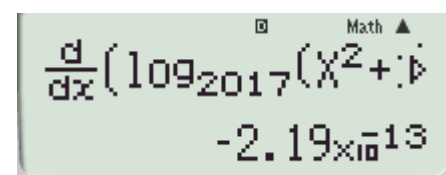
$\frac{d}{dx}(\log_{2017}(x^2 + 1))|_{x=X} - \frac{2x}{(x^2 + 1)\ln(2017)}$ sau đó thao tác giống như trên, X = 1 ta được kết quả là 0.



Do đó D là đáp án đúng.

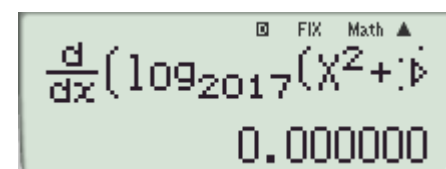


Lưu ý: Ở đây ta lấy X = 1, một số bạn có thể thử với X = 2 hoặc X = 3, ... tùy ý, nhưng với một số giá trị của X, ta sẽ không thu được kết quả là 0 tròn trĩnh, mà chỉ thu được kết quả là một số vô cùng nhỏ.



Ví dụ với X = 2 ta được kết quả là $-2.19 \cdot 10^{-13}$

Điều này không đáng ngại vì $-2.19 \cdot 10^{-13} \ll 0$, vì thế vẫn coi kết quả là 0.



Để khắc phục các bạn có thể sử dụng làm tròn với thao tác $SHIFT \rightarrow MODE \rightarrow 6 \rightarrow 6$ để làm tròn kết quả đến chữ số hàng thập phân thứ 6 sau dấu phẩy, ta được kết quả 0.000000 với X=2.

Ta vẫn có thể thử với A và C để thấy A, C đều sai.

Ví dụ 2: Đạo hàm của hàm số $y = \tan 7x$ là:

A. $\frac{7}{\cos^2 7x}$

B. $-\frac{7}{\cos^2 7x}$

C. $-\frac{7}{\sin^2 7x}$

D. $\frac{7x}{\cos^2 7x}$

Lời giải:

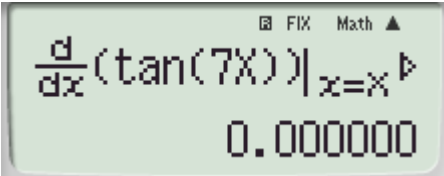
Theo **đáp án nhiều**, ta sẽ thử A, B, D rồi đến C.

Trước hết ta đổi sang chế độ Radian : $SHIFT \rightarrow MODE \rightarrow 4$

Ta cũng chuyển chế độ làm tròn FIX :

$SHIFT \rightarrow MODE \rightarrow 6 \rightarrow 6$

Thử A, Cú pháp gõ $\frac{d}{dx}(\tan(7x))|_{x=X} - \frac{7}{(\cos(x))^2}$



Calculator screen showing the derivative of $\tan(7x)$ at $x=X$ minus $\frac{7}{(\cos(x))^2}$, resulting in 0.000000.

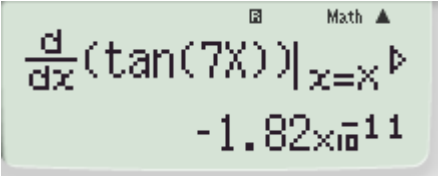
Nhấn CALC, máy hỏi X? ta nhập $\pi:3$ rồi nhấn =.

Kết quả: 0.000000 do đó A đúng.

Ta có thể nhấn CALC một lần nữa, và nhập X? là

$\frac{\pi}{4}$ để thử và vẫn nhận được kết quả là 0.000000.

Vậy A đúng.



Calculator screen showing the derivative of $\tan(7x)$ at $x=X$ minus $\frac{7}{(\cos(x))^2}$, resulting in -1.82×10^{-11} .

Lưu ý: Nếu các bạn không chuyển chế độ làm tròn FIX, kết quả nhận được khi

gán $X = \frac{\pi}{3}$ sẽ là $-1.82 \cdot 10^{-11}$. Kết quả này rất nhỏ so với 0 nên coi là 0.

Nếu các bạn muốn kiểm tra xem B, C, D sai. Bạn chỉnh con trỏ và làm như thử A. bạn đều nhận được kết quả khác 0.

Vậy Đáp án A.

▪ **Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$ bằng:

A. $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$
 $6x^5 - 20x^4 + 16x$

B. $6x^5 + 16x^3$

C. $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$

D.

Bài 2: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x^3}$ là:

A. $\frac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$ B. $\frac{1}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$ C. $\frac{x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$ D. $\frac{x-6x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$

Bài 3: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cot x}$ là:

A. $\frac{-1}{\sin^2 x \sqrt{\cot x}}$ B. $\frac{-1}{2 \sin^2 x \sqrt{\cot x}}$ C. $\frac{1}{2\sqrt{\cot x}}$ D. $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cot x}}$

Gợi ý: ta thay hàm $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ để thực hiện cú pháp vào máy tính.

Bài 4: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{2x^2 + x + 1}$ là:

A. $\frac{-(4x+1)}{(2x^2 + x + 1)^2}$ B. $\frac{-(4x-1)}{(2x^2 + x + 1)^2}$ C. $\frac{-1}{(2x^2 + x + 1)^2}$ D. $\frac{(4x+1)}{(2x^2 + x + 1)^2}$

Bài 5: Hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ có đạo hàm là:

A. $y' = x^2 e^x$ B. $y' = -2x e^x$ C. $y' = (2x - 2)e^x$ D. Kết quả khác

Bài 6: Tính đạo hàm của hàm số: $y = x(\ln x - 1)$

A. $\ln x$ B. 1
C. $\ln x - 1$ D. $\frac{1}{x} - 1$

Bài 7: : Tính đạo hàm của hàm số $y = 2017^x$.

A. $y' = x \cdot 2017^{x-1}$ B. $y' = 2017^x \cdot \ln 2017$
C. $y = 2016^x$ D. $y = \frac{2017^x}{\ln 2017}$

Bài 8: Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 4x$ là :

A. $8 \sin 8x$ B. $4 \sin 8x$ C. $\sin 8x$ D. $2 \sin 8x$

$\Rightarrow$ Bài 9: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ là:

A. $\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ B. $\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ C. $\frac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ D. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}}$

Bài 10: Đạo hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin 2x + \cos 2x$ là;

A. $4\cos 2x + 2\sin 2x$

C. $4\cos 2x - 2\sin 2x$

B. $2\cos 2x - 2\sin 2x$

D. $-4\cos 2x - 2\sin 2x$

Đáp án: 1.A 2.A 3.B 4.A 5.A 6.A 7.B 8D. 9.B 10.C

⇒ **Bài toán 3: Tính đạo hàm cấp 2 của hàm số.**

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$. Tính đạo hàm cấp 2 của hàm số tại điểm $x = x_0$

Bước 1: Ta gán $X = 0.0000001$, $0.0000001 \rightarrow SHIFT \rightarrow STO \rightarrow X$

X này sẽ đóng vai trò số gia Δx

Giá trị gán này chỉ cần đủ nhỏ, không nhất thiết giống hệt như tôi gán.

Bước 2: Cú pháp tính đạo hàm cấp 1 của $f(x)$ tại $x = x_0$: $\left. \frac{d}{dx}(f(x)) \right|_{x=x_0}$

Bước 3: Đưa con trỏ sửa thành: $\left. \frac{d}{dx}(f(x)) \right|_{x=x_0+X}$ rồi tính

Bước 4: Tính đạo hàm cấp 2 tại x_0 : $\frac{Ans - PreAns}{X}$

PreAns Được nhập bằng thao tác $ALPHA \rightarrow Ans$

PreAns là kết quả của phép tính liền trước phép tính cuối cùng, Ans là kết quả nhớ của phép tính cuối cùng.

Lưu ý: + Số gia Δx tùy ý gán, do đó có thể chưa đủ nhỏ, dẫn đến kết quả chính xác như kết quả của đề, có thể sai khác nhưng rất nhỏ.

+ Các bạn có thể tùy ý lấy số gia Δx cứ miễn là $f(x+\Delta x) - f(x) \neq 0$ là được.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm cấp 2 của hàm số

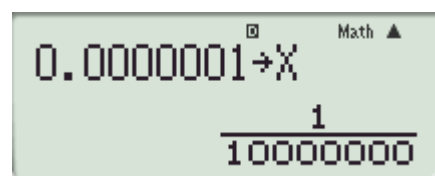
$y = x^2 + \sqrt{x}$ tại điểm $x = 4$

Lời giải:

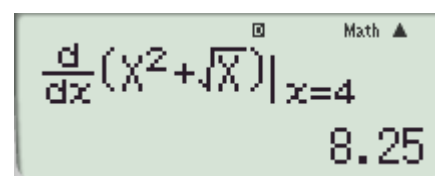
Bước 1, ta gán số gia Δx vào X, thao tác

$0.0000001 \rightarrow SHIFT \rightarrow STO \rightarrow X$

Bước 2: tính đạo hàm cấp 1 của hàm số tại điểm $x = 2$. Làm như bài toán 1.



0.0000001 ÷ X
1
10000000



$\frac{d}{dx}(x^2 + \sqrt{x})|_{x=4}$
8.25

Thao tác: $\frac{d}{dx}(x^2 + \sqrt{x})|_{x=4}$ rồi nhấn “=”.

Ta được kết quả: 8.25

Bước 3: Đưa con trỏ sửa thành

$\frac{d}{dx}(x^2 + \sqrt{x})|_{x=4+X}$ rồi nhấn “=”

Ta được kết quả là: 8.250000197

Bước 4 : Tính giá trị đạo hàm cấp 2 bằng thao tác

$\frac{Ans - PreAns}{X}$ Kết quả : 1.96876433

$$\frac{d}{dx}(X^2 + \sqrt{X})|_{x=4+X} = 8.250000197$$

$$\frac{Ans - PreAns}{X} = 1.96876433$$

Lời bình : với hàm số này ta có thể tính được $y'' = 2 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

Và khi $x = 4$ ta sẽ có giá trị $y''(4) = \frac{63}{32} = 1.96875$. Kết quả này hơi khác một chút so với kết quả ta nhận được ở trên. Nhưng sự khác này rất nhỏ không đáng kể.

Lý do của sự khác biệt này là do ta chọn số gia Δx gán ở bước 1 chưa đủ nhỏ, hơn nữa làm số của chúng ta là *hàm vô tỉ*, do đó sự sai khác khi tính sẽ xảy ra.

Trong quá trình làm bài, bạn đọc cần bình tĩnh để tìm kết quả chính xác.

Ví dụ 2 : Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau $y = (1 - 2x)^4$?

A. $-48(1 - 2x)^2$ B. $24(1 - 2x)^2$ C. $48(1 - 2x)^2$ D. $-48(1 - 2x)^2$

Lời giải :

Ta tính giá trị đạo hàm cấp 2 của hàm số tại $x = 2$

Bước 1 : Gán giá trị 0,00001 cho x,

Thao tác $0.00001 \rightarrow SHIFT \rightarrow STO \rightarrow X$

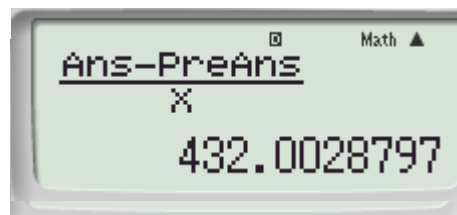
$$0.00001 \rightarrow X$$

$$\frac{d^2}{dx^2}((1-2X)^4)|_{x=2} = 216$$

Bước 2 : Thao tác $\frac{d}{dx}((1-2x)^4)\big|_{x=2}$ rồi nhấn “=” để tính

Bước 3: Chỉnh trở chuột và sửa thành

$\frac{d}{dx}((1-2x)^4)\big|_{x=2+X}$ rồi nhấn “=” tính.



Bước 4 : Tính đạo hàm cấp 2

$$\frac{Ans - PreAns}{X} = 432.0028797$$

Kết quả có sai khác một chút nhưng không đáng kể, như lời bình và chú ý ở trên.

Vậy $y''(2) = 432$.

Ta tính giá trị của các đáp án tại $x = 2$, đáp án nào là 432 đó là đáp án đúng :

Dùng chức năng CALC tính toán.

Đáp án	A. $-48(1-2x)^2$	B. $24(1-2x)^2$	C. $48(1-2x)^2$	D. $-48(1-2x)^2$
$x = 2$	-432	216	432	-216

Vậy **C là đáp án đúng**.

▪ Bài tập tự luyện

Bài 1: Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = \cos 2x$ là:

- A. $-4\sin 2x$ B. $-2\sin 2x$ C. $-4\cos 2x$ D. $4\cos 2x$

Bài 2: Tính đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = 16^x$:

- A. $y' = x \cdot 16^{x-1}$ B. $y' = 16^x \ln^2 16$ C. $y' = 16^x \cdot \ln 16$ D. $y' = \frac{16^x}{\ln^2 16}$

Bài 3: Tính đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = (x-2)(x-3)(x-4)$ tại điểm $x=4$?

- A. 0 B. 6 C. -6 D. 2

Bài 4: Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4$ là:

A. $4x^3 - 6$ B. $16x^3 - 6$ C. $16x^3 - 6x$ D. $16x^2 - 6$

Đáp án: 1.C 2.B 3.B 4B

⇒ **Bài toán 4 : Xét sự biến thiên của hàm số.**

**** 4.1 Hàm số không chứa tham số.**

Hướng giải 1:

Dùng chức năng tính CALC và đạo hàm tại 1 điểm $\frac{d}{dx}$ để tính giá trị đạo hàm, từ đó xét chiều biến thiên

Cú pháp: Nhập hàm $y = f(x)$

Nếu kết quả > 0 thì hàm đồng biến, < 0 thì hàm nghịch biến.

Hướng giải 2:

Dùng chức năng TABLE tính trực tiếp giá trị của hàm số từ đó xét chiều biến thiên.

Ví dụ 1: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ đồng biến trên các khoảng :

A. $(-\infty; 0); (0; 2)$ B. $(0; 2); (2; +\infty)$ C. $(-\infty; 0); (2; +\infty)$ D. $(-\infty; 0); (1; 2)$

Lời giải:

✓ Hướng giải 1:

Bước 1: Nhập hàm $\frac{dx}{d}\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1\right)\Big|_{x=X}$

Bước 2: Nhấn CALC máy hỏi X?

Nhìn vào 4 đáp án, ta thấy ta sẽ xét X trên các khoảng

$(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Do đó ta sẽ lấy 3 giá trị của X để thử đó là

$X = -1$, $X = 1.5$ và $X = 3$

Tại $X = -1.5$ ta được kết quả $-0.75 < 0$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ và $(1;2)$

$X = -1$ và $X = 3$ thì ta đều được kết quả >0 . Do đó hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$

Vậy **đáp án đúng là C**

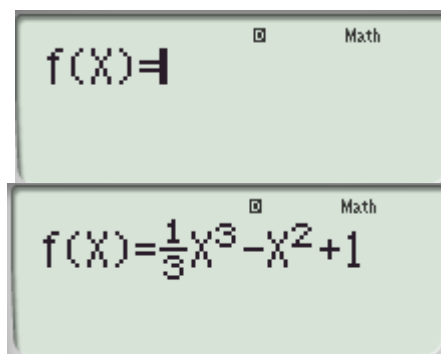
✓ Hướng giải 2.

Ta dùng chức năng TABLE để khảo sát trực tiếp hàm số cần xét.

Bước 1 : Vào chức năng TABLE :

Cú pháp: MODE 7

Bước 2: nhập hàm $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$



Nhấn "=", máy sẽ hỏi lần lượt START? END? và STEP?

START: giá trị khởi đầu cho biến x

END: giá trị kết thúc cho biến x

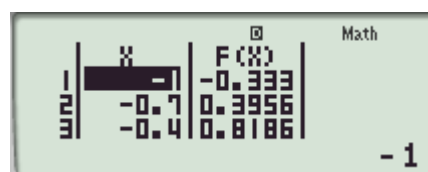
END: khoảng cách giữa 2 giá trị liên tiếp của biến x (gọi là bước nhảy)

Nhìn vào 4 đáp án, ta thấy ta sẽ xét X trên các khoảng

$(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

Tôi sẽ khảo sát giá trị hàm số trong khoảng từ -1 đến 3 với bước nhảy 0.3

Nhập START = -1, END = 3 STEP = 0.3



x	F(x)
-1	-0.333
-0.7	0.3956
-0.4	0.8186
-0.1	0.9896
0.2	0.9626
0.5	0.7916
0.8	0.5306
1.1	0.2336
1.4	-0.045

1.7	-0.252
2	-0.3332.6
2.3	-0.234
2.6	0.0986
2.9	0.7196

Lưu ý: Có thể một số máy sẽ hỏi $g(x)$, ta nhấn “=” để bỏ qua, ta được bảng giá trị:

Từ bảng giá trị, ta có thể thấy:

$F(x)$ tăng dần từ -1 đến -0.1

Giảm dần từ 0.2 đến 0.8

Giảm dần từ 1.1 đến 1.7

Tăng dần từ 2 đến 2.9

Do đó có thể biết được hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0); (2; +\infty)$

Do đó C là đáp án đúng

Ví dụ 2 : Các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ là :

- A. Đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 1)$ và $(1; 2)$
- B. Đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; 1)$, nghịch biến trên $(2; +\infty)$ và $(1; 2)$
- C. Đồng biến trên $(0; 1)$ và $(1; 2)$, nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$
- D. Đồng biến trên $(0; 1)$ và $(-\infty; 0)$, nghịch biến trên $(0; 1)$ và $(-\infty; 0)$

Lời giải :

✓ Hướng giải 1

Bước 1 : Nhập hàm

Cú pháp $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \right) \Big|_{x=X}$

Bước 2 : Nhấn CALC để gán biến X.

Ở đây ta có 4 khoảng cần xét là $(-\infty; 0); (0; 1); (1; 2); (2; +\infty)$

Do đó ta sẽ thử 4 giá trị X lần lượt là -1; 0.5 ; 1.5; 3

x	-1	0.5	1.5	3
y'(x)	$\frac{3}{4}$	-3	-3	$\frac{3}{4}$
Dấu y'	+	-	-	+

Từ đó ta thấy Hs: Đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

Nghịch biến trên $(0; 1)$ và $(1; 2)$

Vậy **A là đáp án đúng.**

✓ Hướng giải 2 :

Dùng chức năng TABLE, ta khảo sát hàm số như sau :

Bước 1 : vào TABLE với thao tác MODE 7

Bước 2 : Nhập hàm : $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$

A calculator screen displaying the function $f(X) = \frac{X^2 + X + 1}{X - 1}$. The screen has a green background and a small 'Math' icon in the top right corner.

Bước 3 : Nhấn “=”

Ở đây ta có 4 khoảng cần xét là $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$

Do đó tôi sẽ khảo sát với x từ -1 đến 3 với bước nhảy là 0.3

Nhập START = -1;

END = 3; STEP = 0.3

x	F(x)
-1	0.5
-0.7	0.7117
-0.4	0.8857
-0.1	0.9909
0.2	0.95
0.5	0.5
0.8	-2.2
1.1	13.1
1.4	5.9
1.7	5.1285
2	5
2.3	5.0692

2.6	5.225
2.9	5.4253

Ta được bảng giá trị

Từ đó:

$F(x)$ Tăng dần từ -1 đến -0.1

Giảm dần từ 0.2 đến 0.8

Giảm dần từ 1.1 đến 1.7

Tăng dần từ 2 đến 2.9

Do đó Hàm số;

Đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

Nghịch biến trên $(0; 1)$ và $(1; 2)$

Vậy **A là đáp án đúng**.

▪ Bài tập tự luyện:

Bài 1: Hàm số $y = \frac{-2x - 5}{x - 2}$ đồng biến trên:

- A. $(-\infty; 2); (2; +\infty)$
- B. $\mathbb{R}$
- C. $(-\infty; 2]; [2; +\infty)$
- D. $(-\infty; 2); (2; +\infty)$

Bài 2: Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là?

- A. $(0; 3)$
- B. $(2; 4)$
- C. $(0; 2)$
- D. Đáp án khác.

Bài 3: Khoảng đồng biến của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 4$ là? Chọn câu trả lời đúng nhất.

- A. $(-\infty; -1)$
- B. $(3; 4)$
- C. $(0; 1)$
- D. $(-\infty; -1); (0; 1)$

Bài 4: Hàm số $y = \frac{x}{x - 2}$ nghịch biến trên khoảng nào? Chọn câu đúng nhất?

- A. $(-\infty; 2)$

- B. $(2; +\infty)$
 C. Nghịch biến trên từng khoảng xác định.
 D. Đáp án khác.

Bài 5: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2017$:

- A. Nghịch biến trên tập xác định.
 B. Đồng biến trên $(-5; +\infty)$
 C. Đồng biến trên $(1; +\infty)$
 D. Đồng biến trên TXĐ.

Bài 6: Hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-1; +\infty)$ B. $(-\infty; 0)$ C. $[1; +\infty)$ D. $(1; +\infty)$

Lưu ý tập xác định.

Bài 7: Hàm số $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ nghịch biến trên?

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ C. $(-\infty; -1)$ D. $(-\infty; 0)$

Bài 8: Hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ nghịch biến trên:

- A. $[3; 4)$ B. $(2; 3)$ C. $(\sqrt{2}; 3)$ D. $(2; 4)$

Bài 9: Hàm số $y = \sqrt{x} - \ln x$ nghịch biến trên?

- A. $(e; +\infty)$ B. $(0; 4)$ C. $4; +\infty)$ D. $(-\infty; e)$

Đáp án: 1.D 2.C 3.D 4.C 5.D 6.D 7.A 8.A 9.B

**** 4.2 Bài toán chứa tham số m.**

Ta sẽ sử dụng 2 chức năng là CALC và $\frac{d}{dx}$ tính đạo hàm tại 1 điểm để xét.

Bước 1: Dùng chế độ tính đạo hàm tại 1 điểm $\frac{d}{dx}(f(x, m))|_{x=X}$

Trong đó: x : là biến số,

m là tham số,

X là giá trị của biến.

Bước 2 : chúng ta sẽ gán X là giá trị nằm trong khoảng cần xét đồng biến hay nghịch biến, m chúng ta sẽ gán M là giá trị nằm trong khoảng hay đoạn m mà đề bài đã cho.

Bước 3 : Sánh kết quả nhận được với 0.

- Nếu < 0 thì hàm số nghịch biến
- Nếu > 0 thì hàm số đồng biến.

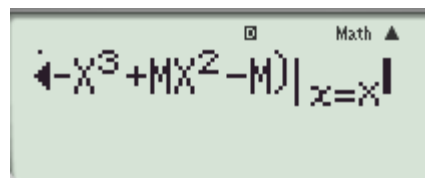
Ví dụ 1 : Hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ đồng biến trên (1 ; 2) thì m thuộc tập nào sau đây ?

- A. $[3; +\infty)$ B. $(-\infty; 3)$ C. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

Lời giải :

Bước 1 : Nhập hàm

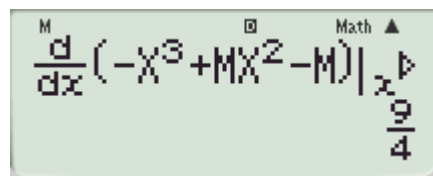
Cú pháp $\frac{d}{dx}(-X^3 + MX^2 - M)|_{x=X}$



M được nhập bằng thao tác ALPHA → M

Bước 2 : Nhấn CALC, máy sẽ hỏi X ? và M ?

X ta sẽ lấy ở khoảng (1 ; 2), do đó ta lấy X = 1,5



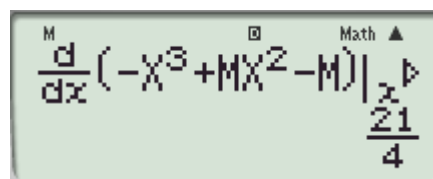
Với M, ta sẽ thử M lần lượt nằm trong khoảng của 4 đáp án

Thử A, chọn M = 3, nhấn “=”. Kết quả $\frac{9}{4} > 0$.

Vậy A là đáp án đúng.

Để khách quan hơn, tôi sẽ lấy thêm một giá trị M

thuộc $[3; +\infty)$, với M = 4, ta được kết quả là $\frac{21}{4} > 0$.



Tôi cũng sẽ thử các đáp án còn lại để thấy B, C, D đều là các đáp án sai.

Chọn M = 2, ta sẽ thử được cả B và C. vì 2 thuộc $(-\infty; 3)$ và $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$

Với $M = 2$, kết quả: $-\frac{3}{4} < 0$

Do đó B sai và C sai.

$$\left. \frac{d}{dx}(-x^3 + Mx^2 - M) \right|_{x=2} = -\frac{3}{4}$$

Thử D, Chọn $M = 1$, ta được kết quả $-\frac{15}{4} < 0$
do đó D cũng sai.

$$\left. \frac{d}{dx}(-x^3 + Mx^2 - M) \right|_{x=2} = -\frac{15}{4}$$

Vậy **Đáp án là A.**

Ví dụ 2: Cho hàm số: $y = \frac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$. tham số m thuộc tập nào thì hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$:

- A. $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ B. $\left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)$ C. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ D. $(-\infty; -1)$

Lời giải:

Vẫn cách làm như trên

Bước 1: Ta nhập hàm

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{3}X^3 - (M-1)X^2 + 3(M-2)X + \frac{1}{3} \right) \right|_{x=X}$$

$$\left. \frac{d}{dx} \left((M-2)X + \frac{1}{3} \right) \right|_{x=X}$$

Bước 2: gán giá trị

Nhấn CALC, gán $X = 3 \in (2; +\infty)$

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{3}X^3 - (M-1)X^2 \right) \right|_{x=3} = -18$$

Ta tính $\frac{-2-\sqrt{6}}{2} \approx -2,22$. Do đó chọn $M = -3$ sẽ thuộc cả 3 tập ở B, C, D. ta sẽ thử được cả 3 đáp án B, C, D,

Ta được kết quả $-18 < 0$. Do đó cả B, C, D đều sai.

Nhập $M = 4$ để thử A, ta được kết quả là $24 > 0$

Vậy **A là đáp án đúng.**

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{3}X^3 - (M-1)X^2 \right) \right|_{x=3} = 24$$

Lưu ý : Có thể nhận ra bài này máy hỏi M ? trước rồi hỏi X ? sau. Lý do là vì khi ta nhập hàm ta nhập M trước, điều này không ảnh hưởng đến kết quả.

▪ **Bài tập tự luyện :**

Bài 1 : Với giá trị nào của m thì hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$?

- A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m \leq 1$ D. $m \leq -1$

Bài 2 : Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $m \leq -3; m \geq 1$ B. $m \geq -3$ C. $m \leq 1$ D. $-3 \leq m \leq 1$

Bài 3 : Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ khi m thỏa mãn ?

- A. $m \geq -3$ B. $m > -3$ C. $m < -3$ D. $m \leq -3$

Bài 4 : Tìm m để hàm số $y = x^2(m - x) - mx + 6$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $m \geq 0$ B. $m \leq 3$ C. $0 \leq m \leq 3$ D. $m \leq 0; m \geq 3$

Bài 5 : Hàm số $y = \frac{mx - 2}{-x + m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định khi m thỏa mãn ?

- A. $m < -\sqrt{2}; m > \sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ C. $m \in \mathbb{R}$ D. $m < \sqrt{2}$

Bài 6 : Hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ khi m thỏa mãn ?

- A. $-2 < m \leq -1$ B. $m > -2$ C. $m \leq -1$ D. $m < -2; m \geq -1$

Đáp án : 1.D 2.D 3. D 4. C 5. A 6. A

$\Rightarrow$ **Bài toán 5 : Các bài toán liên quan đến cực trị của hàm số.**

****5.1 Tìm giá trị tham số để hàm số nhận $A(x_0; y_0)$ là cực trị**

Bước 1 : tính y'

Bước 2 : Dùng SOLVE giải tìm m theo cú pháp :

$y'_{(x,M)}, M$ SHIFT SOLVE rồi gán $x = x_0$

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-1)x - 1$, để hàm số nhận điểm A (1 ; -5) là điểm cực trị thì giá trị của m là ?

A. $m = -1$

B. $m = 1$

C. $m = 0$

D. $m = \frac{1}{2}$

Lời giải :

Bước 1 : Tính y'

$$y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-1)$$

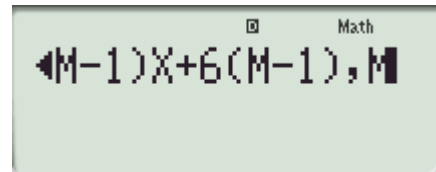
Bước 2 : Nhập $6X^2 + 6(M-1)X + 6(M-1), M$

rồi nhấn SHIFT SOLVE

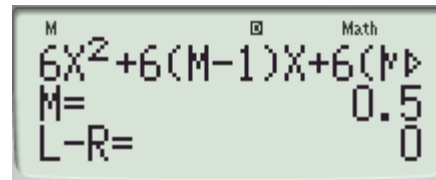
Máy sẽ hỏi X ? Ở đây điểm A (1 ; -5) là cực trị nên $x_0 = 1$. Ta nhập 1 “=”

Máy hỏi SOLVE for M? ta nhấn “=” để tìm M.

Kết quả $M = 0.5 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ **Đáp án D**



Math
◀(M-1)X+6(M-1),M



M
6X^2+6(M-1)X+6(M-1)
M= 0.5
L-R= 0

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = mx^3 - 6(m+1)x + 3$ nhận điểm A(2 ; -13) là cực trị?

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = 4$

D. $m = 6$

Lời giải:

Bước 1: Tính y'

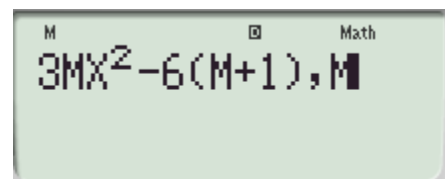
$$y' = 3mx^2 - 6(m+1)$$

Bước 2: Nhập $3MX^2 - 6(M+1), M$

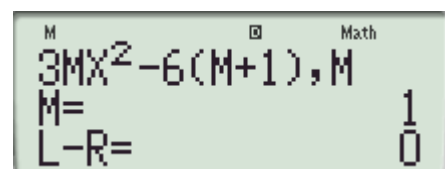
Nhấn SHIFT SOLVE

X? gán $x = 2$ rồi nhấn =

Ta được $M = 1 \Rightarrow$ **Đáp án A**



M
3MX^2-6(M+1),M



M
3MX^2-6(M+1),M
M= 1
L-R= 0

****5.2 Tính khoảng cách giữa 2 điểm cực trị.**

Bước 1: Tính y' , dùng SHIFT SOLVE tìm 2 nghiệm $y' = 0$

Bước 2: Tính khoảng cách:

Ví dụ: Cho hàm số $y = (x+1)(x-2)^2$, khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là?

- A. $2\sqrt{5}$ B. 2 C. 4 D. $5\sqrt{2}$

Lời giải:

Bước 1: Tính

$$y' = (uv)' = u'v + uv' = (x-2)^2 + 2(x+1)(x-2)$$

Bước 2: Tìm nghiệm của $y' = 0$

Nhập $((x-2)^2 + 2(x+1)(x-2)) : x$

$$(x-2)^2 + 2(x+1)(x-2)$$

Nhấn SHIFT SOLVE =

Nhận được $x = 0$

Tiếp tục tìm nghiệm thứ 2: nhấn phím mũi tên sang, sửa biểu thức nhập thành

$$((x-2)^2 + 2(x+1)(x-2)) : x$$

Nhấn SHIFT SOLVE = và ta được $x = 2$

Dùng CALC gán x ta được tung độ y của 2 cực trị

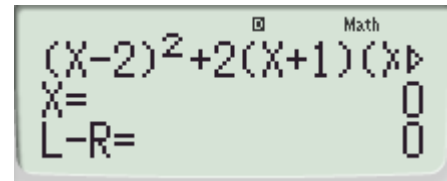
Nhập $(x+1)(x-2)^2$ rồi CALC, lần lượt cho $x = 0$ và $x = 2$

Ta có 2 cực trị: $(0; 4)$ $(2; 0) \Rightarrow$ Khoảng cách $\sqrt{(0-2)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}$

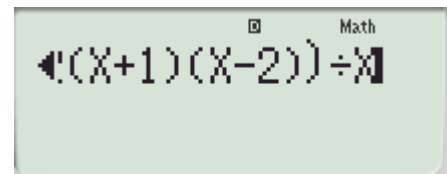
$\Rightarrow$ **Đáp án A**

Giải thích:

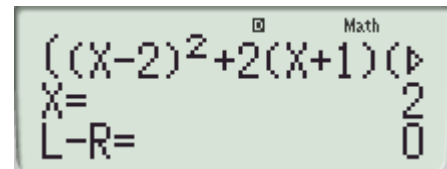
+ Tại sao khi tìm nghiệm thứ 2 của y' , ta lại sửa biểu thức SOLVE thành $((x-2)^2 + 2(x+1)(x-2)) : x$? Lý do là vì đa thức có 1 nghiệm $x = 0$ thì tôi sẽ thực hiện chia đa thức cho $(x-0) = x$ để tìm nghiệm tiếp theo, nếu đáp án tìm



Math
 $(x-2)^2 + 2(x+1)(x-2) : x$
x= 0
L-R= 0



Math
 $(x+1)(x-2)^2 : x$



Math
 $(x-2)^2 + 2(x+1)(x-2) : x$
x= 2
L-R= 0

ra nghiệm thứ nhất $x = x_0$ thì ta sẽ sửa biểu thức SOLVE chia cho $(x-x_0)$ để tìm nghiệm thứ 2.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Tìm khoảng cách giữa 2 điểm cực trị.

- A. 2 B. $2\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{5}$

Lời giải:

Bước 1: tính $y' \quad y' = 3x^2 - 3$

Tìm nghiệm của y' :

Thao tác $3X^2 - 3$ SHIFT SOLVE =

Ta được $x = 1$

Tìm nghiệm thứ hai, sửa thành $(3X^2 - 3) : (X - 1)$
SHIFT SOLVE

Ta được $x = -1$

Vậy 2 điểm cực trị là $(-1; 2); (1; -2)$

Khoảng cách: $2\sqrt{5} \Rightarrow$ **Đáp án B**

****5.3 Viết phương trình đi qua 2 điểm cực trị $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$**

Dạng 1: Không chứa tham số m.

Bước 1: Vào chế độ số phức CMPLX: MODE 2

Bước 2: Tính $y'; y''$

Bước 3: Nhập công thức $y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$ với biến x (a là hệ số của x^3)

Bước 4: dùng CALC gán $x = i$, ta được kết quả là $b + ai$

⇒ Phương trình qua 2 cực trị sẽ là $y = ax + b$ (do $x = i$)

Ví dụ 1: Viết pt đường thẳng qua 2 điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$

A. $y = \frac{-14}{9}x + \frac{7}{9}$ B. $y = \frac{-14}{9}x - \frac{7}{9}$ C. $y = \frac{14}{9}x + \frac{7}{9}$ D. $y = \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}$

Lời giải:

Bước 1:

$$y = x^3 - 2x^2 - x + 1$$

$$y' = 3x^2 - 4x - 1$$

$$y'' = 6x - 4$$

Bước 2: nhập công thức

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 - \frac{(3x^2 - 4x - 1)(6x - 4)}{18}$$

Bước 3: nhấn CALC, gán $X = i$, (nhập i là phím ENG)

Bước 4: = kết quả nhận được là $\frac{7}{9} - \frac{14}{9}i$

Do đó kết quả sẽ là $y = \frac{-14}{9}x + \frac{7}{9} \Rightarrow$ **Đáp án A**

Dạng 2: Chứa tham số m.

Tương tự như dạng 1

Bước 1: Vào chế độ số phức CMPLX: MODE 2

Bước 2: Tính y' ; y'' theo biến x, m

Bước 3: Nhập công thức $y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$ với biến x, m (a là hệ số của x^3)

Bước 4: dùng CALC gán $x = i$, và $m = 1000$ ta được kết quả là $b + ai$

Đọc kết quả.

Ví dụ : Viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của hàm số

$$y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 \quad ?$$

A. $y=2x-m$

B. $y=-2x-m$

C. $y=2x+m$

D. $y=-2x+m$

Lời giải :

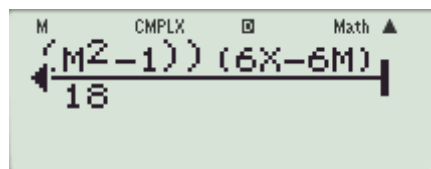
Bước 1 : Vào MODE 2

Bước 2 :

$$y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$$

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$$

$$y'' = 6x - 6m$$



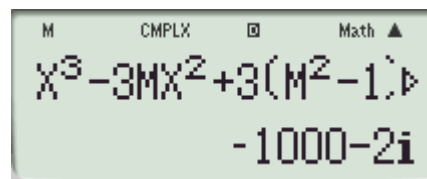
Bước 3 : Nhập

$$x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - \frac{(3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1))}{18}$$

CALC, Gán $x = i$, $m = 1000$

Ta được kết quả $-1000-2i$

$$-2i = -2x, -1000 = -m$$



Do đó $y = -2x - m$ là đáp án đúng

⇒ **Đáp án B**

Kiến thức 2: Các bài toán về nguyên hàm tích phân chống casio.

Theo xu hướng ra đề năm 2017, các bài toán thuộc về nguyên hàm tích phân đều có xu hướng chống Casio, do đó các bài toán tích phân nguyên hàm có

thể dùng phép thử $\frac{dx}{d}(f(x)) \Big|_{x=x_0}$ để thử đáp án sẽ không còn xuất hiện nữa,

$$\int_m^n f(x)dx = a_i K_i$$

thay vào đó là những bài toán dạng $\int_m^n f(x)dx = a_i K_i$ với ta phải tìm a_i . Do đó tôi sẽ đưa ra phương pháp cho các bài toán như vậy.

⇒ **Bài toán 1: Tích phân chống Casio 2 ẩn**

$$\int_m^n f(x)dx = a.M + b.N$$

Bài toán :

M, m, N, n là những hằng số. a, b là những số chưa biết có thể thuộc tập Q, Z

Tính $f(a,b)$ là biểu thức biến a và b

Bước 1: Tính tích phân $\int_m^n f(x)dx$ rồi gán vào biến A

Bước 2:

Tùy vào bài toán mà ta sẽ đưa ra phương pháp giải hệ hoặc dùng MODE 7 thử đáp án.

Nếu phải dùng MODE 7 thì đòi hỏi sự tư duy nhanh nhạy mới đến đáp án nhanh được.

Ví dụ 1: Giả sử rằng $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$. Khi đó giá trị $a+2b$ là?

A. 30

B. 40

C. 50

D. 60

Lời giải:

Bước 1: Tính tích phân I rồi gán vào A.

Nhập $\int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \text{STO} \rightarrow A$

Bước 2: Thử bằng giải hệ.

Vào giải hệ 2 phương trình 2 ẩn, nhấn MODE 5 1

Ta có hệ pt 2 ẩn a, b
$$\begin{cases} \left(\ln \frac{2}{3} \right) a + b = A \\ a + 2b = K \end{cases}$$

K là 1 trong 4 đáp án, nghĩa là 30; 40 ; 50; hoặc 60.

Thử $K = 30$. Kết quả: $x = 15.477....$; $y = 7.261...$ không đẹp, do đó A sai.

Đưa trở chỉnh lại $K=40$. Kết quả: $x=21$; $y=\frac{19}{2}$ đẹp, do đó $a=21$, $b=\frac{19}{2}$

Và $a+2b=40$ là đáp án

⇒ **Đáp án B**

Bạn đọc có thể tự thử C và D để thấy C và D sai.

Ví dụ 2: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x = a\pi + b$. Tính $a + b$?

A. $\frac{-5}{32}$

B. $\frac{11}{32}$

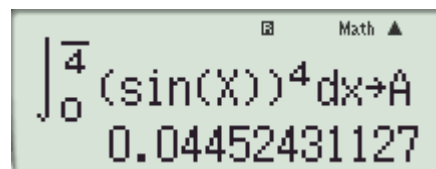
C. 4

D. 7

Lời giải:

Bước 1: Tính I gán vào A

Hàm lượng giác, ta chuyển về Radian: SHIFT MODE 4

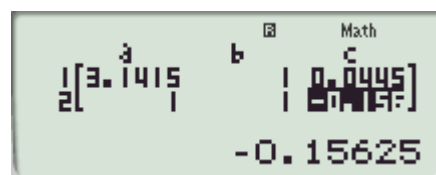


$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(x))^4 dx \rightarrow A$$

0.04452431127

Nhập $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(x))^4$ SHIFT STO A

Bước 2: Giải hệ: $\begin{cases} \pi a + b = A \\ a + b = K \end{cases}$ với K là một trong 4 đáp án của đề bài.



$\begin{cases} 1[3.14159] \\ 2[-0.15625] \end{cases}$

-0.15625

Thử A: cho $K=\frac{-5}{32}$ vào MODE 5 1 giải hệ được $x=\frac{3}{32}$; $y=\frac{-1}{4}$ rất đẹp. Do đó A là đáp án đúng

Bạn đọc có thể tự thử để thấy B, C, D sai.

Lưu ý: Có những cách khác với dạng này, như rút ẩn,... nhưng cách làm này là ngắn và nhanh nhất, do đó tôi không đề cập đến các cách kia.

Ví dụ 3: Xét tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{a}{b}$ là một phân số tối giản. Tính hiệu $a-b$.

A. 743

B. -64

C. 27

D. -207

Lời giải:

Có thể thấy bài này không thể áp dụng luôn cách làm giống 2 ví dụ trên được.

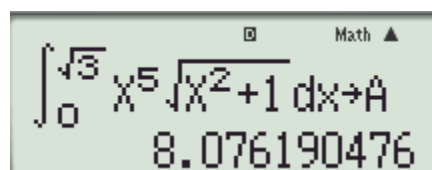
Ta biến đổi 1 chút. $I = \frac{a}{b} \Rightarrow a - bI = 0$

Do đó ta sẽ giải hệ
$$\begin{cases} a - I.b = 0 \\ a - b = K \end{cases}$$

I là kết quả ta tính được bằng máy và gán vào biến A, K là một trong 4 đáp án.

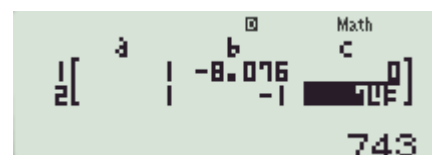
Bước 1: Thao tác tính rồi gán A:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{x^2 + 1} dx \quad \text{SHIFT STO A.}$$



Bước 2 : vào giải hệ MODE 5 1

Nhập hệ số của hệ
$$\begin{cases} a - A.b = 0 \\ a - b = K \end{cases}$$



Thử A: Nhập K = 743

Tính được x = 848 và y = 105. Rất đẹp do đó A là đáp án đúng

Bạn đọc có thể tự thử B, C, D để thấy 3 đáp án đó sai.

Ví dụ 4: Cho $I = \int_1^5 \frac{1}{x\sqrt{3x+1}} dx = a \ln 3 + b \ln 5$. Giá trị của biểu thức $a^2 + ab + 4b^2$ là:

- A. 6 B. 9 C. 8 D. 11

Lời giải: Tôi sẽ đưa ra 2 cách,

Cách 1: Rút biến.

Tính I rồi gán vào A: $\int_1^5 \frac{1}{x\sqrt{3x+1}} dx$ SHIFT STO A

Ta có $I = A = a \ln 3 + b \ln 5 \Rightarrow a = \frac{A - b \ln 5}{\ln 3}$

$$a^2 + ab + 4b^2 = \left(\frac{A - b \ln 5}{\ln 3} \right)^2 + \frac{A - b \ln 5}{\ln 3} \cdot b + 4b^2$$

Vào MODE 7. Nhập biểu thức f(x) và coi b là biến x

Nhập $f(x) = \left(\frac{A - X \ln 5}{\ln 3} \right)^2 + \frac{A - X \ln 5}{\ln 3} \cdot X + 4X^2$

Nhấn =, START chọn -9, END chọn 9, STEP chọn 1.

x	F(x)
-9	388.75
-8	308.14
-7	236.89
-6	175
-5	122.47
-4	79.315
-3	45.514
-2	21.076
-1	6
0	0.2862
1	3.9348
2	16.945
3	39.319
4	71.054
5	112.15
6	162.61
7	222.43
8	291.62
9	370.16

Vì đây ta thấy các giá trị ở đáp án nguyên nên a, b nguyên, TABLE tính tối đa 20 giá trị nên chọn từ -9 đến 9 là bao quát nhất.

Ta có bảng giá trị:

Từ bảng giá trị ta thấy có 2 giá trị đẹp.

$b = -6 \quad a^2 + ab + 4b^2 = 175$

Calculator screen showing the integral of $\frac{1}{1 - x\sqrt{3x+1}}$ from 1 to 5, resulting in 0.5877866649.

Calculator screen showing a table of values for F(X) from X=-9 to X=9. The values are: -9: 388.75, -8: 308.14, -7: 236.89, -6: 175, -5: 122.47, -4: 79.315, -3: 45.514, -2: 21.076, -1: 6, 0: 0.2862, 1: 3.9348, 2: 16.945, 3: 39.319, 4: 71.054, 5: 112.15, 6: 162.61, 7: 222.43, 8: 291.62, 9: 370.16.

$$b=-1 \quad a^2 + ab + 4b^2 = 6$$

$a^2 + ab + 4b^2 = 6$ là một trong các đáp án của đề bài, do đó đó là đáp án đúng.

⇒ **Đáp án A.**

Cách 2: Biến đổi rồi đoán.

Tính I: $\int_1^5 \frac{1}{x\sqrt{3x+1}} dx$ „=„

$$I = a \ln 3 + b \ln 5$$

$$\Rightarrow I = \ln(3^a \cdot 5^b)$$

Ta có: $\Rightarrow 3^a \cdot 5^b = e^I$

Tính e^I bằng thao tác e^{Ans} =

Ta được kết quả $e^{\text{Ans}} = 1.8 = \frac{9}{5} = 3^2 \cdot 5^{-1}$

Do đó $a = 2$; $b = -1$

Thay vào tính được: $a^2 + ab + 4b^2 = 6$

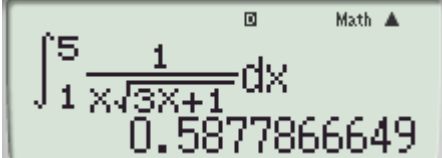
⇒ **Đáp án A**

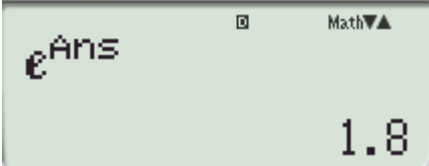
⇒ **Bài toán 2: Tích phân chống Casio 3 ẩn.**

PP: Rút ản rồi dùng Mode 7 để thử.

Ví dụ 1: (Đề thi minh họa lần 2 của bộ giáo dục)

Cho $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$. Với a, b, c nguyên. Tính $S = a + b + c$.





A. 6 B. 2 C. -2 D. 0

Lời giải:

Cách 1

Bước 1: Tính giá trị tích phân rồi gán vào biến A.

Với S=6	
x	f(x)
-9	10.24
-8	7.9809
-7	5.721
-6	3.4612
-5	1.2013
-4	-1.058
-3	-3.318
-2	-5.578
-1	-7.738
0	-10.09
1	-12.35
2	-14.61
3	-16.87
4	-19.13
5	-21.39
6	-23.65
7	-25.91
8	-28.17
9	-30.43

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2 + x} dx$$

SHIFT STO A

Bước 2: Biến đổi gán biến

$$A = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$$

$$S = a + b + c \Rightarrow a = S - b - c$$

$$A = (S - b - c) \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$$

$$\Rightarrow b = \frac{A - S \ln 2 + c(\ln 2 - \ln 5)}{\ln 3 - \ln 2}$$

Coi b là hàm f(x), c là x, A đã biết,

S ta sẽ thử vào 1 trong 4 đáp án.

Vào MODE 7

Thử đáp án A, ta lấy $S=6$.

Nhập hàm
$$f(x) = \frac{A - 6\ln 2 + X(\ln 2 - \ln 5)}{\ln 3 - \ln 2}$$

START -9, END 9, STEP 1.

Ta có bảng giá trị:

Ta thấy không có giá trị nguyên nào của x và $f(x)$. Do đó $S = 6$ không phải đáp án đúng, loại A.

Với $S=2$	
x	f(x)
-9	17.078
-8	14.818
-7	12.559
-6	10.299
-5	8.0394
-4	5.7795
-3	3.5197
-2	1.2598
-1	-1
0	-3.259
1	-5.519
2	-7.779
3	-10.03
4	-12.29
5	-14.55
6	-16.81
7	-19.07
8	-21.33
9	-23.59

Thử đáp án B, lấy $S=2$

Nhập hàm
$$f(x) = \frac{A - 2\ln 2 + X(\ln 2 - \ln 5)}{\ln 3 - \ln 2}$$

START -9, END 9, STEP 1.

Ta có bảng giá trị:

Ta thấy với $x = -1$, thì $f(x) = -1$ giá trị nguyên

$$\Rightarrow c = -1, b = -1$$

$$\Rightarrow S = 2$$

$\Rightarrow$ **Đáp án B.**

Để chắc chắn, ta sẽ thử lại đáp án:

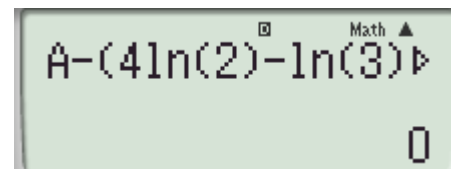
$$b = -1, c = -1 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Cú pháp: } A - (4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5)$$

Ta thấy kết quả là 0.

Do đó B đúng là đáp án đúng

Bạn đọc có thể tự thử để thấy C, D là 2 đáp án sai.



A - (4ln(2) - ln(3) - ln(5)) = 0

Cách 2:

$$I = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5 = \ln(2^a 3^b 5^c)$$

$$\text{Ta có } \Rightarrow 2^a 3^b 5^c = e^I$$

$$\text{Do đó ta tính } \int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x}$$

$$e^{\text{Ans}} = \frac{16}{15} = \frac{2^4}{3^1 \cdot 5^1} = 2^4 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Nhập

$$\Rightarrow S = a + b + c = 2$$

$\Rightarrow$ **Đáp án B**

Ví dụ 2: Cho $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của

$$g(x) = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} \quad \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

với a, b, c là số nguyên. Tính $a + b + c$?

A. 2

B. 0

C. 4

D. 2

Lời giải:

Cách 1:

Do $f(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$. do đó $f'(x)=g(x)$

Tính
$$f'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x-1} + \frac{(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{2x-1}}$$

$$(2ax + b)\sqrt{2x-1} + \frac{(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{2x-1}} = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$$

Ta có: $\Rightarrow (2ax + b)(2x-1) + (ax^2 + bx + c) = 10x^2 - 7x + 2 \quad (1)$

Đẳng thức (1) đúng với mọi x . Ta thay giá trị bất kì của x vào (1)

$$x = 1 \Rightarrow (2a + b) + a + b + c = 5$$

$$x = 2 \Rightarrow (4a + b).3 + 4a + 2b + c = 28$$

$$x = 3 \Rightarrow (6a + b).5 + 9a + 3b + c = 71$$



$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vào MODE 5 2 giải hệ 3 phương trình 3 ẩn ta có:

$$\Rightarrow a + b + c = 2$$

$\Rightarrow$ **Đáp án A.**

Cách 2:

Ta có thể đồng nhất hệ số từ đẳng thức (1) của cách 1.

$$(2ax + b)(2x-1) + (ax^2 + bx + c) = 10x^2 - 7x + 2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 5ax^2 + (3b - 2a)x + c - b = 10x^2 - 7x + 2 \Rightarrow \begin{cases} 5a = 10 \\ 3b - 2a = -7 \Rightarrow a = 2; b = -1; c = 1 \\ c - b = 2 \end{cases}$$

Cách 3:

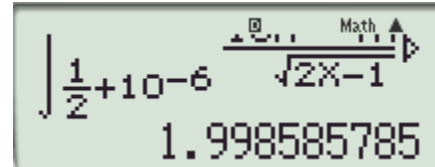
Dùng định nghĩa tích phân:

$f(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ nên:

$$\int_a^b g(x)dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

Lại có $f(1)=a+b+c$ là biểu thức cần tính

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad a + b + c = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)$$



Do tại $x = \frac{1}{2}$ thì $g(x)$ không xác định, do đó ta sẽ tính gần đúng.

$$\int_{\frac{1}{2}+10^{-6}}^1 \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x+1}} dx = 1.9985 \approx 2$$

Cú pháp tính: $\frac{1}{2}+10^{-6}$

Do đó $a+b+c=2 \Rightarrow$ **Đáp án A.**

▪ Bài tập tự luyện

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = a + b\sqrt{3} (a, b \in \mathbb{Q})$$

Bài 1: Cho tích phân . Tính $a + b$?

- A. -2 B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx = a + b\pi \quad (a, b \in \mathbb{Q})$$

Bài 2: Cho tích phân . Tính $a + b$?

- A. $\frac{29}{60}$ B. $\frac{31}{60}$ C. $\frac{17}{60}$ D. $\frac{53}{60}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x} dx = a\sqrt{5} + b\sqrt{2} \quad (a, b \in \mathbb{Q})$$

Bài 3: cho tích phân . Tính $a+b$?

- A. $\frac{7}{12}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^3 x}{\sin x - \cos x} dx = a\pi + b \quad (a, b \in \mathbb{Z}).$$

Bài 4: Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^3 x}{\sin x - \cos x} dx = a\pi + b \quad (a, b \in \mathbb{Z}).$ Tính $a + b$?

- A. 2 B. 0 C. -2 D. 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x} dx = a\sqrt{3} + b \quad (a, b \in \mathbb{Z}).$$

Bài 5: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x} dx = a\sqrt{3} + b \quad (a, b \in \mathbb{Z}).$ Tính $a + b$?

- A. 2 B. -5 C. 5 D. -8

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2 \cos x}{2 + 3 \sin x - \cos 2x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}).$$

Bài 6: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2 \cos x}{2 + 3 \sin x - \cos 2x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}).$ Tính giá trị biểu thức $a+b+c$?

- A. -3 B. -2 C. 2 D. 1

$$\int_0^{\pi} x(x + \sin x) dx = a\pi^3 + b\pi + c \quad (a, b, c \in \mathbb{Q}).$$

Bài 7: Cho tích phân $\int_0^{\pi} x(x + \sin x) dx = a\pi^3 + b\pi + c \quad (a, b, c \in \mathbb{Q}).$ Tính giá trị biểu thức $a+b+c$?

- A. $\frac{10}{7}$ B. $\frac{10}{9}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{10}{9}$

$$\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx = ae^2 + be \quad (a, b \in \mathbb{Q}).$$

Bài 8: Cho tích phân $\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx = ae^2 + be \quad (a, b \in \mathbb{Q}).$ Tính giá trị biểu thức $a+b$?

- A. -1 B. 0.5 C. 1 D. 2

Đáp án: 1.C 2.C 3. B 4.B 5.A 6.D 7.C 8. B

Kiến thức 3: Xử lý vector trong không gian

Ở đây, tôi không đưa ra phương pháp, tôi sẽ chỉ đưa cách tính tích vô hướng, tích có hướng, độ dài vector.

MODE 8 1 1: Nhập dữ liệu cho vector A

MODE 8 2 1: Nhập dữ liệu cho vector B

MODE 8 3 1: Nhập dữ liệu cho vector C

Trong môi trường vector:

SHIFT 5 1: Nhập lại dữ liệu cho các vector A, B, C

SHIFT 5 2: Truy cập dữ liệu các vector A, B, C

SHIFT 5 3/4/5: Trích xuất dữ liệu vector A, B, C ra ngoài màn hình (Nhập thao tác)

SHIFT 5 7: tích vô hướng (dot)

Abs: độ dài vector.

$$\vec{a} = (12; -4; 3)$$

$$\vec{b} = (2; -1; 5)$$

Ví dụ : Cho 2 vector

Tính tích vô hướng, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Tính $|\vec{a}|$

Tìm $\cos(\vec{a}; \vec{b})$.

Lời giải:

+ Nhập dữ liệu 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

Nhập $\vec{a}$: MODE 8 1 1 rồi nhập 12; -4 ; 3

Nhập $\vec{b}$: MODE 8 2 1 rồi nhập 2; -1; 5

Nhấn AC

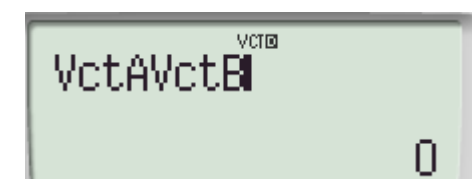
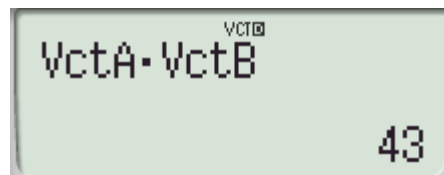
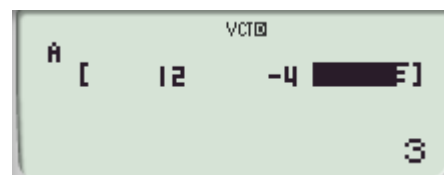
+ Tính tích vô hướng:

Thao tác: SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 =

Kết quả: 43

Dấu • biểu thị cho phép nhân vô hướng

+ Tính tích có hướng: chỉ cần nhập liên tiếp 2 vector A và B



Thao tác: SHIFT 5 3 SHIFT 5 4 =

Kết quả là $\begin{bmatrix} \vec{a}; \vec{b} \end{bmatrix} = (-17; -54; -4)$



+ Độ dài vector A,

Cú pháp: Abs(VctA)

Thao tác: SHIFT Abs SHIFT 5 3 =

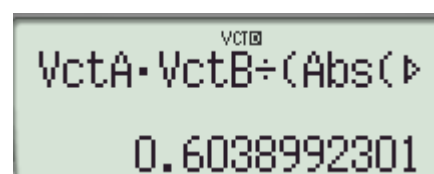
Kết quả: $|\vec{a}| = 13$



+ Tính $\cos(\vec{a}; \vec{b})$

Cú pháp: VctA • VctB : (Abs(VctA)Abs(VctB))

Kết quả: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0.638992301$



▪ Bài tập áp dụng:

Bài 1: Góc giữa 2 vector $\vec{a}(2; 5; 4); \vec{b}(6; 0; -3)$ là?

- A. 30° B. 45° C. 90° D. 60°

Bài 2: Cho $A(0; 1; 1); B(2; 2; 2); C(5; 2; 1); D(4; 3; -2)$. Thể tích của tứ diện ABCD là?

- A. 5 B. 4 C. 6 D. 9

Bài 3: Khoảng cách từ điểm A (1 ; 2; 1) đến đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ là?

- A. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ D. $\sqrt{5}$

Bài 4: Cho $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}; d_2: \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{5}$

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng $d_1; d_2$ là?

- A. $\frac{11}{\sqrt{5}}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\sqrt{5}$
- Đáp án: 1. C 2. B 3. B 4. A

Kiến thức 4: Các bài toán số phức.

⇒ **Bài toán 1: Tìm số phức z**

Phương pháp:

+ Vào môi trường số phức MODE 2.

+ Tính toán

Ví dụ 1: Tìm số phức z thỏa mãn $(1+i)(2i+1)z - 2 - 6i = 2i^3$

- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $1+i$ D. $1-i$

Lời giải:

Bước 1: Ta vào môi trường số phức: MODE 2

Bước 2: Tính toán

Từ đề bài $z = \frac{2i^3 + 2 + 6i}{(1+i)(2i+1)}.$

Ta nhập $\frac{2i^3 + 2 + 6i}{(1+i)(2i+1)}$ nhấn “=”

ta được kết quả: $z = 1 - i.$

⇒ **Đáp án D**

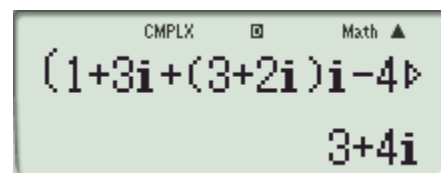
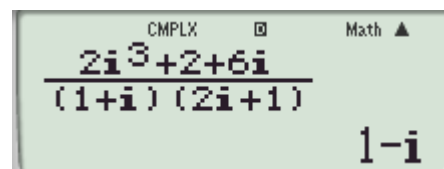
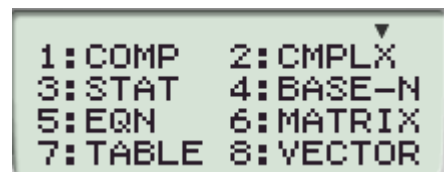
Ví dụ 2: Tìm số phức z thỏa mãn $\frac{(1+i)z}{3-i} - (3+2i)i + 4i^5 = 1 + 3i$

- A. $5+2i$ B. $3+4i$ C. $4+i$ D. $1+2i$

Lời giải:

Bước 1: Vào môi trường MODE 2

Bước 2: Tính



Nhập biểu thức $(1 + 3i + (3 + 2i)i - 4i^5) : \frac{1+i}{3-i}$

Kết quả $z = 3+4i$

⇒ **Đáp án C.**

⇒ **Bài toán 2:** Tìm số phức chứa cả z và $\bar{z}$ có đáp án.

Phương pháp: vào MODE 2 rồi tính toán

Ví dụ 1: Tìm số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z + (2 + i)\bar{z} = -2 + 4i$

A. $3+2i$

B. $1+3i$

C. $4+i$

D. $2+3i$

Lời giải:

Bước 1: vào MODE 2 (CMPLX)

Bước 2: Ta coi z là biến X , $\bar{z}$ nhập với thao tác SHIFT 2 2 rồi X (Conjg(X)) rồi thử đáp án.

Nhập biểu thức: $(2 + 3i)X + (2 + i)\text{Conjg}(X)$

Nhấn CALC, tiến hành thử X

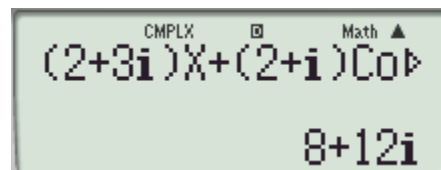
Đáp án A, nhập $3+2i$ "=", kết quả $8+12i$. Do đó A sai.

Nhấn CALC lần nữa rồi nhập $1+3i$ để thử đáp án

B. Kết quả là $-2 + 4i$ giống với đề bài,

⇒ **B là đáp án đúng**

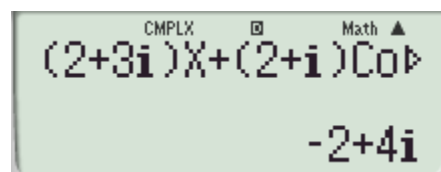
Tiếp tục thao tác như trên thử C, D để thấy C, D là 2 đáp án sai.



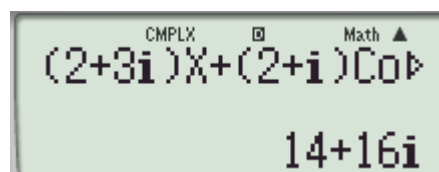
CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$
 $(2+3i)X+(2+i)\text{Conjg}(X)$
 $8+12i$



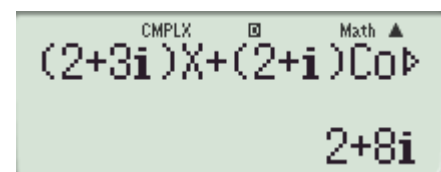
CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$
 $1+3i$
 3
 $+2i$



CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$
 $(2+3i)X+(2+i)\text{Conjg}(X)$
 $-2+4i$



CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$
 $(2+3i)X+(2+i)\text{Conjg}(X)$
 $14+16i$



CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$
 $(2+3i)X+(2+i)\text{Conjg}(X)$
 $2+8i$

⇒ **Bài toán 3:** Tìm số phức chứa cả z và $\bar{z}$ không có đáp án.

Phương pháp:

Bước 1: Vào MODE 2

Bước 2: Coi $\begin{cases} z = X + Yi \\ \bar{z} = X - Yi \end{cases}$, tính biểu thức rồi dùng CALC gán $\begin{cases} X = 100 \\ Y = 0.01 \end{cases}$

Bước 3: Phân tích kết quả

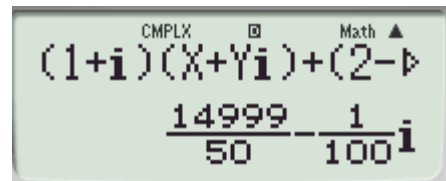
Ví dụ 1 : Tìm số phức z thỏa mãn $(1+i)z + (2-i)\bar{z} = 11+i$?

Lời giải:

Bài toán này, đề bài không có sẵn đáp án để thử như ví dụ 1. Ta thực hiện như sau:

Bước 1: Vào MODE 2

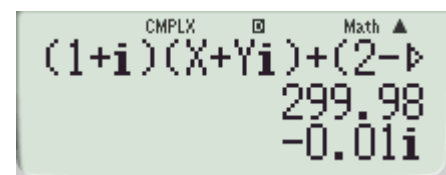
Bước 2: Coi $\begin{cases} z = X + Yi \\ \bar{z} = X - Yi \end{cases}$



CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$
 $(1+i)(X+Yi) + (2-i)(X-Yi)$
 $\frac{14999}{50} - \frac{1}{100}i$

Nhập $(1+i)(X+Yi) + (2-i)(X-Yi)$ tính về trái

Nhấn CALC rồi nhập $\begin{cases} X = 100 \\ Y = 0.01 \end{cases}$ rồi “=”



CMPLX $\square$ Math $\blacktriangle$
 $(1+i)(X+Yi) + (2-i)(X-Yi)$
299.98
-0.01i

Ta được kết quả $\frac{14999}{50} - \frac{1}{100}i = 299,98 - 0,01.i$

Nhấn phím $S \Leftrightarrow D$ để chuyển sang dạng thập phân

Phân tích: $\begin{cases} X = 100; y = 0,01 \\ 299,98 = 300 - 0,02 = 3.100 - 2.0.01 = 3X - 2Y \\ -0,01.i = -Y.i \end{cases}$

Theo đề bài thì về trái là $11+i \Rightarrow \begin{cases} 3X - 2Y = 11 \\ -Y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = -1 \\ X = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow z = 3 - i$$

Ví dụ 2: Tìm số phức z thỏa mãn $z + (2 + i)\bar{z} = 10 + 2i$?

Lời giải:

Làm như ví dụ 1.

Bước 1: Vào MODE 2

Bước 2: Nhập $(X + Yi) + (2 + i)(X - Yi)$

CALC rồi cho $\begin{cases} X = 100 \\ Y = 0.01 \end{cases}$ “=”

$$\text{Kết quả: } \frac{30001}{100} + \frac{9999}{100}i = 300,01 + 99,99i$$

$$\text{Phân tích: } \begin{cases} 300,01 = 3 \cdot 100 + 0,01 = 3X + Y \\ 99,99i = (100 - 0,01)i = (X - Y)i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3X + Y = 10 \\ X - Y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 3 \\ Y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 3 + i$$

$\Rightarrow$ **Bài toán 3:** Tìm Mô đun số phức z

Phương pháp:

Bước 1: Vào MODE 2

Bước 2: Tính toán, Mô đun thao tác SHIFT HYP (Abs)

Ví dụ 1: Tìm mô đun số phức $z = (4 + i)(2 + i)$

Lời giải:

Bước 1: Vào MODE 2

Bước 2: Tính

Nhập $|(4 + i)(2 + i)|$ “=” ta được kết quả $\sqrt{85}$

Ví dụ 2: Tìm mô đun số phức z thỏa mãn $(4 + i^3)2i - (3 + 4i)z = 7 - 2i$

A. $|z| = 2\sqrt{5}$

B.

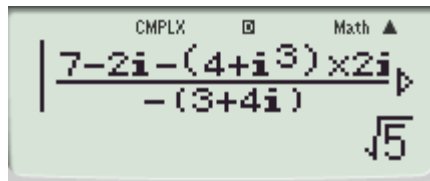
C. $|z| = 2\sqrt{2}$

D. $|z| = \sqrt{2}$

Lời giải:

Bước 1: Vào MODE 2

Bước 2: Nhập $\left| \frac{7-2i-(4+i^3) \cdot 2i}{-(3+4i)} \right|$ “=”



Kết quả: $\sqrt{5} \Rightarrow$ **Đáp án B**

Chú ý: Nếu bài toán hỏi tìm mô đun của số phức z với biểu thức chứa cả z và $\bar{z}$ thì ta thực hiện tìm z như **bài toán 2** rồi thực hiện tính mô đun số phức vừa tìm được.

$\Rightarrow$ **Bài toán 4: Giải phương trình phức .**

Phương pháp:

+ Nếu phương trình không chứa i : vào MODE 5 3 (bậc 2), MODE 5 4 (bậc 3) thực hiện giải như số thực

+ Nếu phương trình phức chứa i : Dùng CALC thay đáp án để thử.

Ví dụ 1: Giải phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$

A. $z = -1 \pm 3i$

B. $z = 2 \pm 2i$

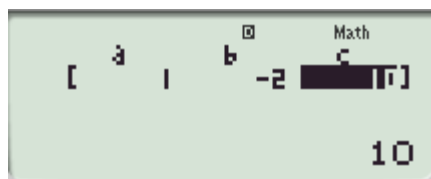
C. $z = -3 \pm 2i$

D. $z = 1 \pm 3i$

Lời giải:

Bước 1: Vào MODE 5 3

Bước 2: Nhập hệ số: 1; -2; 10 nhấn “=”



Kết quả: $z = 1 \pm 3i$

$\Rightarrow$ **Đáp án D**

Ví dụ 2: Giải phương trình: $z^2 - iz + 3i + 1 = 0$

A. $\begin{cases} z = 1 - i \\ z = 1 - 2i \end{cases}$

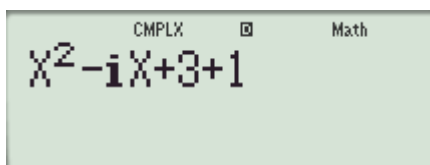
B. $\begin{cases} z = 1 - i \\ z = -1 - 2i \end{cases}$

C. $\begin{cases} z = 1 - i \\ z = -1 - 2i \end{cases}$

D. $\begin{cases} z = 1 + i \\ z = -1 + 2i \end{cases}$

Lời giải:

Bước 1: Vào MODE 2



Bước 2: Nhập biểu thức $X^2 - iX + 3i + 1$

Nhấn CALC rồi lần lượt thử các đáp án.

Kết quả: **Đáp án B**

⇒ **Bài toán 5: Bài toán quỹ tích.**

Phương pháp:

+Thay điểm thỏa mãn của quỹ tích vào biểu thức xem có thỏa mãn biểu thức không.

+ Đường thẳng thay 2 điểm, đường cong thay 3 điểm.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 2i + 1| = |\bar{z} - i + 3|$

Tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức z .

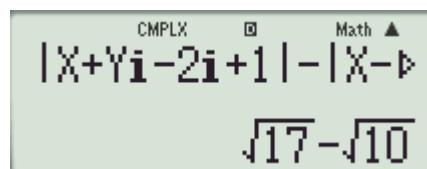
A. $3x+2y+4=0$ B. $4x+6y+5=0$ C. $4x-6y+7=0$ D. $3x+2y+1=0$

Lời giải:

Bước 1: Vào MODE 2

Bước 2: Coi $\begin{cases} z = X + Yi \\ \bar{z} = X - Yi \end{cases}$

Nhập $|X + Yi - 2i + 1| - |X - Yi - i + 3|$



CMPLX $\square$ Math ▲
 $|X+Yi-2i+1|-|X-Yi-i+3|$
 $\sqrt{17}-\sqrt{10}$

Thử, kết quả cho là 0 thì đó là đáp án đúng.

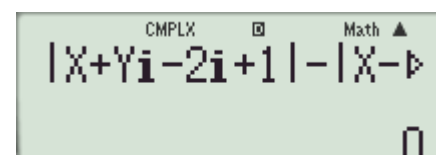
Thử A. đường $3x+2y+4$ đi qua điểm $(0; -2)$

Nhấn CALC cho $X=0$; $Y=-2$ kết quả là $\sqrt{17} - \sqrt{10} \Rightarrow$ Loại A

Thử B: Đường $4x+6y+5$ đi qua $\left(0; -\frac{5}{6}\right)$

CALC cho $X = 0$; $Y = -\frac{5}{6}$ ta được kết quả là 0

B có thể là đáp án đúng, ta thay thêm 1 điểm nữa.



CMPLX $\square$ Math ▲
 $|X+Yi-2i+1|-|X-Yi-i+3|$
0

ta thay điểm $\left(-\frac{5}{4}; 0\right)$. CALC cho $X = -\frac{5}{4}; Y=0$ kết quả vẫn là 0

⇒ **B là đáp án đúng**

⇒ **Bài toán 6: Tìm Argument.**

Đây là dạng toán chỉ có trong chương trình nâng cao, nên rất khó xảy ra trong đề, nhưng tôi vẫn đề cập để các bạn tham khảo

Phương pháp:

MODE 2 vào môi trường số phức

SHIFT MODE 4 vào chế độ Radian

SHIFT 2 1 (ARG)

Ví dụ: Tìm Argumen của số phức $z = 1 - \sqrt{3}i$?

A. $-\frac{\pi}{4} + k2\pi$

B. $-\frac{\pi}{3} + k2\pi$

C. $\frac{\pi}{4} + k2\pi$

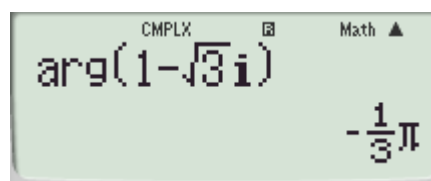
D. $\frac{\pi}{3} + k2\pi$

Lời giải:

MODE 2 vào môi trường số phức

SHIFT MODE 4 vào chế độ Radian

SHIFT 2 1 rồi nhập số phức $z = 1 - \sqrt{3}i$



kết quả $-\frac{\pi}{3} + k2\pi$

⇒ **Đáp án B**

▪ **Bài tập áp dụng**

Bài 1: Gọi $z_1; z_2$ là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 1 = 0$

$A = |z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng?

A. 2

B. -7

C. 8

D. 4

Bài 2: Gọi $z_1; z_2$ là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$. Phần thực của $z_1^2 + z_2^2$ là:

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 7

Bài 3: Số phức $z = \frac{3-4i}{4-i}$ là?

- A. $z = \frac{16}{15} - \frac{11}{15}i$ B. $z = \frac{16}{17} - \frac{13}{17}i$ C. $z = \frac{9}{5} - \frac{4}{5}i$ D. $z = \frac{9}{25} - \frac{23}{25}i$

Bài 4: Cho số phức z thỏa mãn: $(3-2i)\bar{z} - 4(1-i) = (2+i)z$

Mô đun của z là:

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Bài 5: Phần ảo của số phức $z = (\sqrt{2} + i)^2 (1 - \sqrt{2}i)$ bằng:

- A. $-\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 3

Bài 6: Cho $A = (2-3i)(1+2i) + \frac{4-i}{3+2i}$. A bằng:

- A. $\frac{-114-2i}{13}$ B. $\frac{114+2i}{13}$ C. $\frac{114-2i}{13}$ D. $\frac{-114+2i}{13}$

Bài 7: Số phức z thỏa mãn $z - (2+3i)\bar{z} = 1-9i$ là:

- A. $-3-i$ B. $-2-i$ C. $2-i$ D. $2+i$

Bài 8: Trên mặt phẳng Oxy, tập biểu diễn z thỏa: $|zi - (2+i)| = 2$ là:

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ C. $3x+4y-2=0$
B. $x+2y-1=0$ D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Bài 9: Cho $z = 1 - i\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề sai:

- A. z có 1 argumen là $\frac{2\pi}{3}$
B. $|z|=2$
C. $\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i$

D. Z có dạng lượng giác $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Bài 10: Các số thức x, y thỏa mãn $3x + y + 5xi = 2y - 1 + (x - y)i$ là:

A. $(x; y) = \left(\frac{1}{7}; \frac{4}{7}\right)$

C. $(x; y) = \left(-\frac{1}{7}; \frac{4}{7}\right)$

B. $(x; y) = \left(-\frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right)$

D. $(x; y) = \left(-\frac{1}{7}; -\frac{4}{7}\right)$

Đáp án: 1.D 2. A 3.B 4.C 5.C 6. B 7.C 8. A 9. A 10.C